| Tablas de frecuencias | Interpretación de gráficos. La media aritmética en tablas de frecuencias con intervalos | Medidas de Tendencia central. Moda y Mediana en tablas de frecuencias con intervalos | Medidas de Posición. Percentiles y Cuartiles | Probabilidades. Principio Multiplicativo. Permutaciones (Priorización de Contenidos) | UNIDAD 2 (Priorización de Contenidos) Potencias y Raíces enésimas | (Priorización de Contenidos) Logaritmos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Guía 1 | Guía 2 | Guía 4 | Guía 6 | Guía 8 | Guía 10 | Guía 12 |

GUÍA DE APRENDIZAJE N° 12
**LOGARITMOS**

| NOMBRE | CURSO | 2° medio A-B |
|---|---|---|
| | FECHA | / /20 |

**Capacidades**: Razonamiento Lógico. Resolución de problemas
**Destrezas:** Reconocer, Analizar, calcular, Interpretar, Resolver **OA11**

**Instrucciones:** Imprimir esta guía, pegarla y desarrollarla en el cuaderno. Si no puedes imprimirla deja el espacio para pegar la guía y solo realiza el desarrollo en tu cuaderno escribiendo el nombre de la guía. Cuando vuelvas a clase se te entregará una copia de la guía para pegarla.Cuando la resuelvas corrige tu guía con las respuestas y si tienes alguna duda escríbeme al correo wg62117@gmail.com.

**CONTINUANDO CON LA SEGUNDA UNIDAD, AHORA VEREMOS LOGARITMOS, SU CONCEPTO, PROPIEDADES Y SU APLICACIÓN.**

## I. INTRODUCCIÓN A LOGARITMOS

Observa la siguiente expresión **$2^3 = 8$**
Si designamos una incógnita x podemos tener tres casos

**Caso 1.** **$2^3 = x$**
Para encontrar el valor de la incógnita debemos calcular la potencia, es decir x = 2 x 2 x 2 = 8

**Caso 2.** **$x^3 = 8$**
Para encontrar el valor de x hay que despejar la incógnita x usando la raíz cúbica, es decir $x = \sqrt[3]{8}$,
Por lo tanto, buscamos un número que multiplicado tres veces nos dé como resultado 8, luego x=2

**Caso 3.** **$2^x = 8$**
Para encontrar el valor de x hay que despejar la incógnita a través del cálculo del logaritmo, es decir

$$x = \log_2 8$$

Y se lee como **"logaritmo de 8 en base 2"** donde para encontrar el valor de x la pregunta sería: **"la base 2 elevada a qué número resulta 8 y la respuesta es 3"**

**II. LOGARITMO. DEFINICIÓN.** Exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado. **En símbolos** $\log_b a$ **a = c** ➔ $b^c = a$

Revisemos la definición de logaritmo: "exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado". Si lo escribiera como ecuación, corresponde a resolver $\log_b a = x$, donde b es la base del logaritmo y a es su argumento, con a y b positivos.

**Por ejemplo**, calcular **$\log_2 16$** equivale a resolver la ecuación **$\log_2 16 = x$**. Entonces, ya que la base del logaritmo es 2, el exponente no se conoce y 16 es el argumento, es decir, el valor de la potencia, se puede escribir **$2^x = 16$**. Y como 16 es una potencia de 2, de hecho, $2^4$, esto equivale a **$2^x = 2^4$**, luego, igualando los exponentes, se concluye que **x = 4**.

**Ejemplo 1:** Calcula el valor de **$\log_7 343$**

Solución. $log_7 343 = x$ $\quad 7^x = 343 = 7^3$ $\quad x = 3$

Luego, $log_7 343 = 3$

**Ejemplo 2:** Obtener el valor de $log_2 \sqrt{8}$
Solución.

$$log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^x = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Luego, $log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

Al igual que en el caso de las raíces, no todos los logaritmos se pueden calcular. Esta es la razón de la condición de valores positivos para a y b. Observa el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3:** Obtener el valor de $\log_8 -512$

Solución $\log_8 -512 = x \Rightarrow 8^X = -512$

Pero ¿la potencia de un número positivo puede ser negativa? No, en ningún caso. Luego, $\log_8 -512$ no existe.

**Ejemplo 4:** Calcula el valor de $\log_{(-2)} 8$

$$log_{(-2)} 8 = x \Rightarrow (-2)^x = 8 = 2^3$$

**Ejemplo 5:** ¿Cuánto resulta log 5?

$$log_1 5 = x \Rightarrow 1^x = 5$$

Ya que toda potencia de 1 es 1, no existe un valor de x, tal que $1^X$ sea igual a 5.

**EN GENERAL**

• El argumento y la base de un logaritmo son números reales positivos. Además, la base no puede ser 1. Es decir, en la expresión $\mathbf{\log_b a}$, siempre, por definición $a \in \mathbb{R}^+ \text{ y } b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$

• Por definición, $\mathbf{x = \log_b a \Rightarrow b^x = a}$, entonces se puede decir que el logaritmo es el exponente de una potencia.

• La expresión $\log_b a$ se lee como: “logaritmo de a en base b”.

**EJERCICIO 1.** Calcula el valor de los siguientes logaritmos.
a. $\log_2 64$ b. $\log_{325} 325$ c. $\log_2 256$ d. $\log_{13} 2197$ e. $\log_{19} 361$ f. $\log_{0,4} 0{,}064$
Respuesta. a.......... b......... c.......... d............ e.......... f................

**EJERCICIO 2**. Encuentre el argumento de los siguientes logaritmos.
a. $\log_6 x = 1$ b. $\log_2 x = 5$ c. $\log_{10} x = -4$ d. $\log_{0,05} x = 3$ e. $\log_{0,25} x = -2$ f. $\log_3 x = 60$
Respuesta. a.......... b......... c.......... d............ e.......... f................

**EJERCICIO 3.** Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\log_2 512 + \log_3 243 - \log_8 64 =$ ..........................................................................................

b. $-5 \log_8 64 + 7 \log_7 49 - 3 \log_{10} 100 =$ ..................................................................................

c. $6 \log_9 81 - 3 \log_{10} 10\,000 + 4 \log_{0,2} 0{,}04 =$ ......................................................................

**EJERCICIO 4.** Calcula cada uno de los siguientes logaritmos

a. $log_9 243$ c. $log_{0,7} 0{,}343$ e. $log_a \sqrt{a^8}$ g. $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ i. $log_{16} 8$

b. $log_2 128$ d. $log_a a^9$ f. $log_6 \frac{1}{36}$ h. $log_8 16$ j. $log_a \sqrt[5]{a^2}$

respuesta. a.......... b......... c.......... d............ e.......... f................

g.……… h.………… i.………… j.…………

**EJERCICIO 5**. Dada cada expresión, encuentra el valor de x

a. $\log_2 x = 6$  b. $\log_{\frac{3}{4}} x = -2$  c. $\log_{0,3} x = 3$  d. $\log_{0,004} x = -3$

Respuestas. a……… b………… c………… d ……………

**EJERCICIO 6**. Encuentre el valor de x

a. $\log_2 64 = x$  b. $\log_9 243 = x$  c. $\log_b b^7 = x$  d. $\log_{0,7} 0,49 = x$

e. $\log_{0,4} 0,064 = x$  f. $\log_m m^{0,3} = x$  g. $\log_{16} 8 = x$  h. $\log_5 \frac{1}{25} = x$

i. $\log_p p^{3/4}$  j. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = x$  k. $\log_{\frac{4}{3}} \frac{9}{16} = x$  l. $\log_a \sqrt{a^7} = x$

m. $\log_8 16 = x$  n. $\log_{64} 16 = x$  o. $\log_b \sqrt[5]{b} = x$  p. $\log_3 27 = x$

Respuestas. a………. b……… c………. d………. e………… f…………
g………. h……… i………. j………… k………. l………… m……….
n………. o……… p………

**III. PROPIEDADES**. Las propiedades que se cumplen para logaritmos, para cualquier valor de la base b, se pueden establecer y demostrar a partir de las propiedades de las potencias.

- **Logaritmo de la unidad:**

Por propiedades de potencias, ya que el valor de la potencia es 1 cuando el exponente de la potencia es cero (puesto que la base es positiva y distinta de 1). Luego, $\log_b 1 = 0$, con $b \neq 1$.
Ejemplo: $\log_5 1 = 0$

$$\log_b 1 = x \iff b^x = 1, \text{ ya que } b > 0, b \neq 1$$
$$\iff b^x = b^0$$
$$\iff x = 0$$

- **Logaritmo de la base del sistema:**
  Ejemplo: $\log_3 3 = 1$

$$\log_b b = x \iff b^x = b \iff b^x = b^1 \implies x = 1.$$
Luego, $\log_b b = 1$, con $b \neq 1$.

- **Logaritmo de una potencia con igual base:**
  Ejemplo: $\log_6 6^3 = 3$.

$$\log_b b^n = x \iff b^x = b^n \iff x = n$$
Luego, $\log_b b^n = n$, con $b \neq 1$.

- **Cambio de base:**
  $\log_b B = x \Leftrightarrow b^x = B$

$\log_c b^x = \log_c B$ ⟵ Se aplican logaritmos en una base c

$x \cdot \log_c b = \log_c B$ ⟵ Por propiedad de logaritmos que se trabajará en la página 49

Por lo tanto, $\log_b B = \dfrac{\log_c B}{\log_c b}$ para todo $b, c, B > 0$; $b, c \neq 1$

Ejemplo: $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{0,69897}{0,30103} = 2,32192$

**RESUMEN**

Se cumple, ya que la base $b$ del logaritmo es positiva y distinta de 1, que:
- Logaritmo de la unidad: $\log_b 1 = 0$.
- Logaritmo de la base del sistema: $\log_b b = 1$.
- Logaritmo de una potencia con igual base: $\log_b b^n = n$.
- Cambio de base: $\log_b B = \dfrac{\log_c B}{\log_c b}$ para todo $b, c, B > 0$; $b, c \neq 1$

Al igual que para las potencias y las raíces, para los logaritmos también existen propiedades que permiten simplificar los cálculos. Para demostrarlas, los logaritmos se pueden escribir en forma exponencial y aplicar algunas de las propiedades de las potencias.

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Es decir,

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

Ejemplo.

$$\log_2 128 = \log_2 (4 \cdot 32) = \log_2 4 + \log_2 32 = 2 + 5 = 7$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos delos factores.

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

Ejemplo: $\log_3 \left(\frac{81}{243}\right) = \log_3 81 - \log_3 243 = 4 - 5 = -1$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de dicha potencia por el logaritmo de su base.

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Ejemplo: $\log_2 4^3 = 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$

Ejemplo: $\log_4 \sqrt[6]{16} = \frac{1}{6} \cdot \log_4 16 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

**RESUMEN**

Sean $a$, $b$, $c$ números racionales y positivos, con la base $b$ distinta de 1:

- Logaritmo de un producto: $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
- Logaritmo de un cociente: $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- Logaritmo de una potencia: $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
- Logaritmo de una raíz: $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$

**EJERCICIO 7**. Desarrollar usando propiedades

a. $\log_a \frac{x \cdot y}{z} =$

b. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right)^2 =$

c. $\log_a \cdot \frac{x^3 \cdot y^5}{z^2} =$

d. $\log_a \frac{x^3 . y}{\sqrt{z}} =$

**EJERCICIO 8.** Calcula cada uno de los siguientes logaritmos

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $\log_2 64$ | d. $\log_5 1$ | g. $\log_{81} 27$ | j. $\log_{\frac{4}{3}} \frac{16}{9}$ |
| b. $\log_9 243$ | e. $\log_3 3$ | h. $\log_{128} 1$ | k. $\log_{\frac{1}{2}} 128$ |
| c. $\log_{0,7} 0{,}49$ | f. $\log_5 5^7$ | i. $\log_6 6^3$ | l. $\log_5 \frac{1}{25}$ |

Respuestas. a.......... b.......... c .......... d.......... e.........f.........
g .......... h......... i......... j.......... k.......... l..........

**EJERCICIO 9.** Utilizando una calculadora encuentra el valor de los siguientes logaritmos

a. $log_2 3$ b. $log_6 7$ c. $log_7 9$ d. $log_6 11$

Respuestas. a……… b………. c………. d………..

**EJERCICIO 10.** Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones

a. $log_4 64 + log\ 1000 + log_5 125$

b. $log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} - log_{\frac{6}{5}} \frac{125}{216} + log\ 10\,000$

c. $2\ log_5 25 - 3\ log_7 49 + 4\ log_8 4096$

d. $3\ log_{\frac{1}{4}} 32 + 7\ log_{\frac{1}{5}} 125 - 6\ log_{\frac{1}{3}} 243$

e. $4\ log_{\frac{5}{7}} \frac{25}{49} + 2\ log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} - 5\ log_{\frac{6}{7}} \frac{216}{343}$

f. $2\ log\ 100\,000 - 2\ log_4 256 + 4\ log_2 32$

Respuestas. a……………… b………….. c………….. d……….. e………….. f…………..

**EJERCICIO 11.** Desarrolla cada una de las siguientes expresiones, utilizando propiedades

a. $log_b (x^2 - 9x - 22)$

b. $log_b \left(100x^8 - 80x^7 + 16x^6\right)^{\frac{8}{3}}$

c. $log_b (x^3 + y^3)^2$

d. $log_p \dfrac{a^2 b^4 c^5}{d^2}$

Respuestas. a………………………………………………………………………………………………………
b……………………………………………………………………………………………………………………
c……………………………………………………………………………………………………………………
d……………………………………………………………………………………………………………………

**EJERCICIO 12.** Reduce cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo

a. $log_m a - 2\ log_m b + log_m c - 3\ log_m d$

b. $log_b (x^2 + 1) + log_b (x + 1) + log_b (x - 1)$

c. $log_p (x + y + z) - 4\ log_p (x - y - z)$

d. $log_p (x + 3) - 4\ log_p (x - 2)$

e. $2\ log_b 3 + 3\ log_b 2$

f. $log_b c - 6\ log_b a$

g. $log_b a - log_b c - log_b d + log_b e$

h. $log_b c + log_b a - 1$

Respuestas. a…………………….. b………………… c……………………… d…………………………….
e…………………………………. f……………………………. g…………………….. h…………………………….

**EJERCICIO 13.** Si A = $\log_6 2$, B = $\log_6 3$ y C = $\log_6 5$, expresa en términos de A, B y C

a. $log_6 5400$ b. $log_6 90$ c. $log_6 \sqrt{216}$ d. $log_6 \frac{1\,080}{32\,400}$

Respuestas. a…………………….. b……………………… c………………….. d………………………………….

**EJERCICIO 14.** Determine el valor de la incógnita

a. $\log_a 125 = 3$ b. $\log_a 243 = 5$ c. $\log_{625} 25 = x$ d. $\log_{32} 0{,}25 = x$ e. $\log_x 2 = \frac{1}{5}$

Respuestas. a……….. b………. c………… d……….. e…………

**Cuestionario.** Estimado alumno(a). Necesito que contestes estas preguntas para saber lo que aprendiste y lo que para ti tuvo una mayor dificultad. Marca con una X los item que te significaron una mayor dificultad para resolverlos.

…… Calcula el valor de logaritmos (ejercicio 1,2,3,4,5,6,8,10,14)
…… Resuelve ejercicios de logaritmos aplicando propiedades (ejercicio 7,11)
….. Resuelve ejercicios de logaritmos usando calculadora (ejercicio 9)
….. Reduce en un solo logaritmo una expresión logarítmica (ejercicio 12,13)